Analitička geometrija

Literatura

- prezentacija po skripti Analitička geometrija, Željka Milin Šipuš, Mea Bombardelli

Geometrijske transformacije ravnine

Geometrijske transformacije su preslikavanja ravnine na samu sebe:

$$f : E^2 \to E^2.$$

Ako se točka

$$T = (x, y)$$

preslikava u točku

$$T' = (x', y'),$$

tada želimo zapisati vezu između koordinata točaka T i T'.

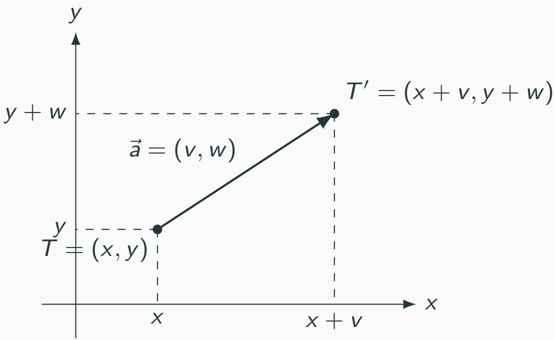
Translacija

Translacija za vektor $\vec{a} = (v, w)$ točki $T = (x, y)$ pridružuje točku

$$T' = (x + v, y + w).$$

Dakle,

$$x' = x + v,$$
$$y' = y + w.$$



Rotacija oko ishodišta

Rotacija oko ishodišta O za kut α u pozitivnom smjeru točki

$$T = (x, y)$$

pridružuje točku $T' = (x', y')$.

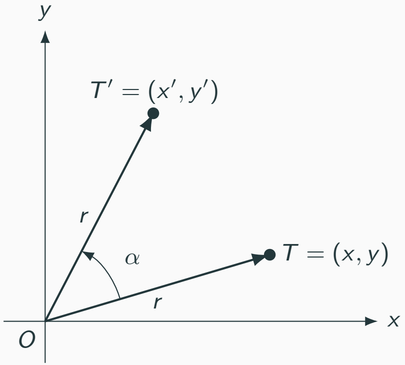
U polarnim koordinatama:

$$T = (r, \varphi), \qquad T' = (r, \varphi + \alpha).$$

Primjenom adicijskih formula, u Kartezijevom sustavu dobivamo:

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\varphi + \alpha) = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= r\sin(\varphi + \alpha) = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}$$

Rotacija oko ishodišta – geometrijski prikaz



Centralna simetrija

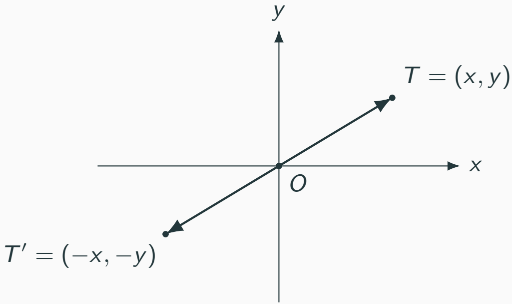
Centralna simetrija sa središtem u ishodištu O točki $T = (x, y)$ pridružuje točku

$$T' = (-x, -y).$$

Dakle,

$$x' = -x,$$
$$y' = -y.$$

Centralna simetrija je poseban slučaj rotacije za kut π.



Osne simetrije

Osna simetrija s obzirom na x-os:

$$T = (x, y) \mapsto (x, -y).$$

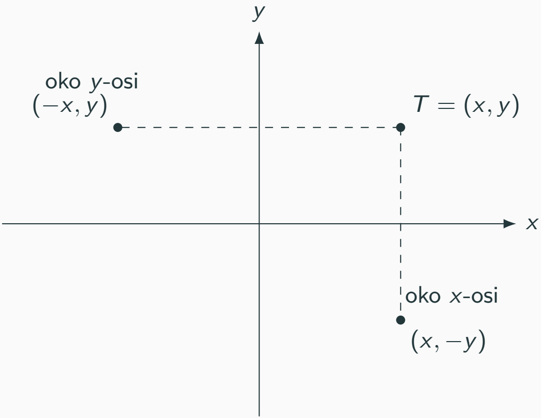
Osna simetrija s obzirom na y-os:

$$T = (x, y) \mapsto (-x, y).$$

Općenitije, osna simetrija s obzirom na pravac kroz ishodište definiran kao $\varphi = \alpha$, točki T s polanim koordinatama (r, φ) pridružuje točku

$$T' = (r, 2\alpha - \varphi)$$

Osne simetrije – geometrijski prikaz



Homotetija

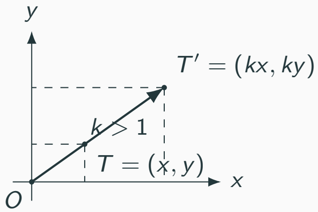
Homotetija sa središtem u ishodištu O i koeficijentom $k \in \mathbb{R}$ točki $T = (x, y)$ pridružuje točku

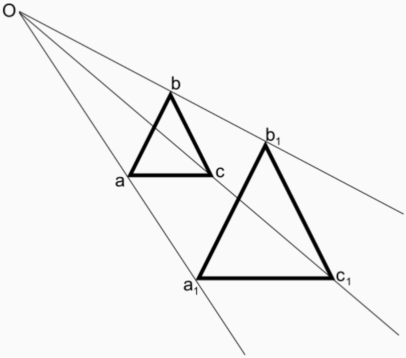
$$T' = (kx, ky).$$

Dakle,

$$x' = kx,$$
$$y' = ky.$$

Homotetija – geometrijski prikaz





Motivacija

Cilj je prepoznati krivulju zadanu općom algebarskom jednadžbom drugog stupnja u varijablama x i y.

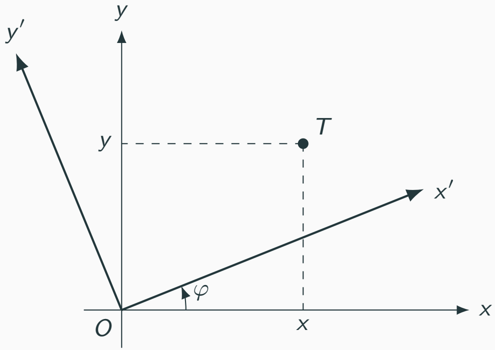
Promjenom koordinatnog sustava, tj. rotacijom i translacijom, tražimo nove koordinate u kojima jednadžba ima prepoznatljiv kanonski oblik.

Promotrimo rotaciju koordinatnog sustava za kut φ u pozitivnom smjeru oko ishodišta O.

Ako su x, y koordinate u početnom sustavu, a x', y' koordinate u rotiranom sustavu, tada za istu točku T vrijedi:

$$
\begin{aligned}
x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\
y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Rotacija koordinatnog sustava – geometrijski prikaz



Translacija koordinatnog sustava

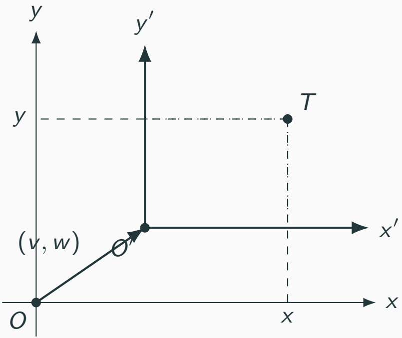
Promotrimo translaciju koordinatnog sustava za vektor

$$(v, w).$$

Ako su x, y koordinate u početnom sustavu, a x', y' koordinate u translatiranom sustavu, tada za istu točku T vrijedi:

$$x = x' + v,$$
$$y = y' + w.$$

Translacija koordinatnog sustava – geometrijski prikaz



Primjer

Primjer. Odredimo jednadžbu krivulje

$$xy = 1$$

u koordinatnom sustavu $\{O; x', y'\}$ koji je dobiven rotacijom sustava $\{O; x, y\}$ oko O za kut $\frac{\pi}{4}$ u pozitivnom smjeru.

Za rotaciju koordinatnog sustava za kut

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

vrijedi:

$$x = x' \cos\frac{\pi}{4} - y' \sin\frac{\pi}{4}, \qquad y = x' \sin\frac{\pi}{4} + y' \cos\frac{\pi}{4}.$$

tj.

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \qquad \text{i} \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Primjer

Početna jednadžba je

$$xy = 1.$$

Uvrstimo:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Tada:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 1,$$

odnosno

$$\frac{1}{2}\big((x')^2 - (y')^2\big) = 1.$$

Zato je:

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1.$$

Primjer: rotirani koordinatni sustav